



CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
„ADOLF HAIMOVICI”
Ediția a XXVIII-a
ETAPA JUDEȚEANĂ – 7 martie 2026
Clasa a IX-a – Secțiunea H1 – Filieră tehnologică

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Subiectul 1. (20 puncte)

Se consideră ecuația $ax^2 + bx + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, având rădăcinile x_1 și x_2 .

- Arătați că dacă numerele reale nenule a, b și c sunt în progresie geometrică, în această ordine, atunci ecuația nu are rădăcini reale.
- Determinați numerele reale a, b, c , unde $a > 0$, pentru care a, x_1, b, x_2, c sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
- Dacă $b = a + c$ și $0 < c < 2a$ arătați că $|x_1 - x_2| < 1$.

SOLUȚIE:

- a, b, c în progresie geometrică $\Rightarrow b^2 = ac$2p
 $\Delta = -3b^2$2p
 $\Delta < 0 \Rightarrow x_1, x_2 \notin \mathbb{R}$2p
- a, x_1, b, x_2, c în progresie aritmetică $\Rightarrow a + c = x_1 + x_2 = 2b$1p
 $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \Rightarrow b(2a + 1) = 0$1p
Cum $a > 0$, convine doar $b = 0 \Rightarrow c = -a$1p
 a, x_1, b, x_2, c în progresie aritmetică $\Rightarrow x_1 = \frac{a+b}{2} = \frac{a}{2}, x_2 = \frac{b+c}{2} = \frac{c}{2}$1p
 $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \Rightarrow a(a^2 - 4) = 0$2p
 $a = 2, c = -2$, care convin.....2p
- $(x_1 - x_2)^2 = S^2 - 4P$2p
 $(x_1 - x_2)^2 = \left(1 - \frac{c}{a}\right)^2$2p
 $|x_1 - x_2| = \left|1 - \frac{c}{a}\right| < 1$2p

Subiectul 2. (20 puncte)

Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, cu proprietatea $f(x + a) \leq x \leq f(x) + a$, $(\forall)x \in \mathbb{R}$ și a un parametru real fixat.

- Arătați că $f(x) = x - a$, $(\forall)x \in \mathbb{R}$.
- Determinați numerele naturale nenule n pentru care $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(n) \geq \frac{n^2 + n - 6a}{2}$.
- Determinați $a \in \mathbb{R}^*$ pentru care graficul funcției $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = a \cdot f(x)$ formează cu axele de coordonate Ox și Oy un triunghi cu aria $A=4$.

SOLUȚIE:

- $x \leq f(x) + a, (\forall)x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) \geq x - a$1p
 $f(x + a) \leq x, (\forall)x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) \leq x - a$2p
Obține $f(x) = x - a, (\forall)x \in \mathbb{R}$1p
- $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(n) = \frac{n(n+1)}{2} - na$2p
Obține $na \leq 3a$1p
Dacă $a > 0 \Rightarrow n \in \{1, 2, 3\}$2p
Dacă $a = 0 \Rightarrow n \in \mathbb{N}^*$2p
Dacă $a < 0 \Rightarrow n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1, 2\}$2p
- $g(x) = ax - a^2, a \in \mathbb{R}^*$1p
 $G_g \cap Ox = \{A(a, 0)\} \Rightarrow OA = |a|$2p



$$G_g \cap Oy = \{B(0, -a^2)\} \Rightarrow OB = |-a^2| = |a|^2 \dots\dots\dots 2p$$

$$A = \frac{|a|^3}{2} \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Obține } a \in \{-2, 2\} \dots\dots\dots 1p$$

Subiectul 3. (20 puncte)

Coardele AB și CD ale unui cerc de centru O sunt perpendiculare și se intersectează în punctul P iar M este piciorul perpendicularei din O pe AB.

- Demonstrați că $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OP}$.
- Demonstrați că $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = 2\overrightarrow{PM}$.
- Arătați că $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = 2\overrightarrow{PO}$.

SOLUȚIE:

- $\triangle OAB$ isoscel, OM înălțime $\Rightarrow OM$ mediană $\Rightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OM}$2p
Dacă N este mijlocul lui CD $\Rightarrow \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{ON}$2p
OMPON dreptunghi $\Rightarrow \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OP}$2p
Obține $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OP}$2p
- $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{PB}$2p
 $= \overrightarrow{PM} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{PB}$2p
 $= \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{PB} = 2\overrightarrow{PM}$2p
- Obține $\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = 2\overrightarrow{PN}$2p
OMPON dreptunghi $\Rightarrow \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PN} = \overrightarrow{PO}$2p
Obține $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = 2\overrightarrow{PO}$2p

Subiectul 4. (30 puncte)

Trei sate A, B și C sunt situate astfel încât, observate dintr-o dronă, se constată că pozițiile lor formează un triunghi dreptunghic în A, iar o gară G este situată între satele B și C (pe segmentul BC).

Măsurătorile făcute au condus la următoarele rezultate: $AB = 2(\sqrt{6} + \sqrt{2})$ km, , $\widehat{ABC} = \widehat{GAC} = 15^\circ$.

- Demonstrați că $\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.
- Determinați lungimile drumurilor de la gara G la fiecare dintre cele trei sate (se admite că drumurile dintre localități sunt segmentele GA, GB și GC).
- Bogdan pleacă la ora 06:33 din satul B pentru a ajunge la gară, dar pentru că drumul BG este închis, trebuie să treacă prin satul A. Drumul din satul B în satul A îl parcurge cu un scuter cu viteza de 38 km/h, iar drumul din satul A la gară îl parcurge pe jos mergând cu viteza de 6 km/h. Știind că trenul în care trebuie să urce Bogdan pleacă la ora 07:10, stabiliți dacă Bogdan ajunge la timp la gară. (se vor utiliza valorile aproximative $\sqrt{2} \cong 1,4$ și $\sqrt{6} \cong 2,4$).

SOLUȚIE:

- $\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ)$2p
 $= \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 30^\circ \cos 45^\circ =$3p
 $= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$3p
- Demonstrează că AG este înălțimea corespunzătoare ipotenuzei BC.....2p
 $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$3p
 $\cos 15^\circ = \frac{GB}{AB} \Rightarrow GB = 2(2 + \sqrt{3})$ km.....3p
 $\sin 15^\circ = \frac{AG}{AB} \Rightarrow AG = 2$ km.....3p



- $\cos 15^\circ = \frac{AB}{BC} \Rightarrow BC = 8\text{km} \Rightarrow GC = 2(2 - \sqrt{3})\text{km} \dots\dots\dots 3\text{p}$
- c) $BA = 2(\sqrt{6} + \sqrt{2})\text{km} \cong 7,6\text{km} \dots\dots\dots 2\text{p}$
- $t_{BA} = 12\text{min} \dots\dots\dots 2\text{p}$
- $AG = 2\text{km} \Rightarrow t_{AG} = 20\text{min} \dots\dots\dots 2\text{p}$
- $t_{B-A-G} = 32\text{min} \dots\dots\dots 1\text{p}$
- Bogdan ajunge la gară la ora 07:05 deci ajunge la timp $\dots\dots\dots 1\text{p}$

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii; se acordă 10 puncte din oficiu.

Orice rezolvare corectă a oricărei probleme, dar diferită de cea din barem se notează cu punctaj echivalent.

Punctajul maxim este de 100 de puncte.

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
„ADOLF HAIMOVICI”
Ediția a XXVIII-a
ETAPA JUDEȚEANĂ-07 MARTIE 2026
Clasa a X-a – Secțiunea H1 – Filieră tehnologică

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Subiectul 1. (20 puncte)

- a) Determinați numerele complexe z pentru care $3|z| - 2\bar{z} = 3 - 2i$.
- b) Dacă z_1 și z_2 sunt soluțiile ecuației $z^2 - z + 1 = 0$, calculați $S_1 = z_1^{100} + z_2^{100}$ și $S_2 = (z_1 - 1)^{200} + (z_2 - 1)^{200}$.

SOLUȚIE:

- a) Fie $z \in \mathbb{C}, z = a + bi; a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow \bar{z} = a - bi$ și $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ 1p
 Egalitatea devine $(3\sqrt{a^2 + b^2} - 2a) + 2bi = 3 - 2i \Rightarrow b = -1$ și $3\sqrt{a^2 + 1} = 3 + 2a$ 2p
 Obținem $a_1 = 0, a_2 = \frac{12}{5} \Rightarrow z_1 = -i, z_2 = \frac{12}{5} - i$ 2p
- b) $z^2 - z + 1 = 0 \Rightarrow (z + 1)(z^2 - z + 1) = 0 \Rightarrow z^3 + 1 = 0 \Rightarrow z^3 = -1$ 2p
- Relațiile lui Viète: $\begin{cases} z_1 + z_2 = 1 \\ z_1 \cdot z_2 = 1 \end{cases}$ 2p
- Deci $S_1 = z_1^{99} \cdot z_1 + z_2^{99} \cdot z_2 = -(z_1 + z_2) = -1$ 3p

Metoda I

- Se observă că $z_1^2 = z_1 - 1 \Rightarrow (z_1 - 1)^{200} = z_1^{400} = (z_1^3)^{133} \cdot z_1 = -z_1$ 4p
 Analog $z_2^2 = z_2 - 1 \Rightarrow (z_2 - 1)^{200} = z_2^{400} = (z_2^3)^{133} \cdot z_2 = -z_2$ 2p
 Finalizare $S_2 = -z_1 - z_2 = -(z_1 + z_2) = -1$ 2p

Metoda II

- Se observă că $(z_1 - 1)^3 = z_1^3 - 3(z_1^2 - z_1 + 1) + 2 = 1$ 3p
 Analog $(z_2 - 1)^3 = z_2^3 - 3(z_2^2 - z_2 + 1) + 2 = 1$ 1p
 Deci $S_2 = [(z_1 - 1)^3]^{66} \cdot (z_1 - 1)^2 + [(z_2 - 1)^3]^{66} \cdot (z_2 - 1)^2 = (z_1^2 + z_2^2) - 2(z_1 + z_2) + 2$ 2p
 Finalizare $S_2 = (z_1 + z_2)^2 - 2z_1 \cdot z_2 = -1$ 2p

**Subiectul 2. (20 puncte)**

a) Determinați $x \in \mathbb{R}$ pentru care $\sqrt{(3-2\sqrt{2})^x} + \sqrt{(3+2\sqrt{2})^x} \leq 6$.

b) Rezolvați sistemul de ecuații $\begin{cases} 2^x + 3^y = 7 \\ 4^x + 9^y = 25 \end{cases}$

SOLUȚIE:

a) Se observă că $3-2\sqrt{2} = \frac{1}{3+2\sqrt{2}}$ și notăm $\sqrt{(3+2\sqrt{2})^x} = t$, unde $t > 0$ 2p

Se obține $\frac{1}{t} + t \leq 6 \Rightarrow t^2 - 6t + 1 \leq 0 \Rightarrow t \in [3-2\sqrt{2}, 3+2\sqrt{2}]$ 4p

Revenind la notația făcută obținem $3-2\sqrt{2} \leq (3+2\sqrt{2})^{\frac{x}{2}} \leq 3+2\sqrt{2}$ 2p

Deci $(3+2\sqrt{2})^{-1} \leq (3+2\sqrt{2})^{\frac{x}{2}} \leq 3+2\sqrt{2}$, unde $3+2\sqrt{2} > 1 \Rightarrow x \in [-2, 2]$ 2p

b) Notăm $2^x = a$ și $3^y = b$ și sistemul devine $\begin{cases} a + b = 7 \\ a^2 + b^2 = 25 \end{cases}$ 2p

Deoarece $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab \Rightarrow \begin{cases} a + b = 7 \\ a \cdot b = 12 \end{cases}$ 2p

Metoda I

$\begin{cases} b = 7 - a \\ a \cdot (7 - a) = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 7 - a \\ a^2 - 7a + 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow (a, b) \in \{(3, 4); (4, 3)\}$ 2p

Metoda II

Numerele a și b sunt soluțiile ecuației $t^2 - 7t + 12 = 0 \Rightarrow (a, b) \in \{(3, 4); (4, 3)\}$ 2p

Revenind la notațiile făcute vom obține

$\begin{cases} 2^x = 3 \\ 3^y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \log_2 3 \\ y = \log_3 4 \end{cases}$ 2p

sau $\begin{cases} 2^x = 4 \\ 3^y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$, deci $(x, y) \in \{(\log_2 3, \log_3 4); (2, 1)\}$ 2p

Subiectul 3. (20 puncte) Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{dacă } x \leq 0, \\ \log_{\frac{1}{2}}(x+1) + 1, & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$

- a) Arătați că funcția f este inversabilă.
b) Dacă funcția $g: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = 2^{x+1} - 1$, rezolvați ecuația $(f \circ g)(x) = x^2 - 2$.

Soluție:

a) Metoda I:

reprezintă grafic funcția f 6 p
arată că orice paralelă la axa Ox intersectează graficul într-un singur punct 2p
obține f este bijectivă 1p
dacă f bijectivă, atunci funcția este inversabilă 1p

Metoda II:

Studiază injectivitatea și surjectivitatea pe ramuri

aplică proprietatea: dacă din $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ atunci funcția este injectivă 1p
deoarece $x^2 + 1 \geq 1$, iar $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) + 1 < 1 \Rightarrow$

egalitatea $f(x_1) = f(x_2)$ are loc doar în două cazuri 1p

I. pentru $x_1, x_2 \leq 0: x_1^2 + 1 = x_2^2 + 1 \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1 = x_2$ 1p

II. pentru $x_1, x_2 > 0: \log_{\frac{1}{2}}(x_1 + 1) + 1 = \log_{\frac{1}{2}}(x_2 + 1) + 1 \Rightarrow x_1 = x_2$ 1p

Din I și II obține f injectivă 1p

Pentru $x \leq 0, f(x) = x^2 + 1 \geq 1, \Rightarrow y \in [1, \infty)$; pentru $x > 0, \log_{\frac{1}{2}}(x+1) < 0$ (bază subunitară, funcție monoton strict descrescătoare), $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) + 1 < 1 \Rightarrow y \in (-\infty, 1)$ 2p

$Imf = [1, \infty) \cup (-\infty, 1) \Rightarrow Imf = \mathbb{R} \Rightarrow f$ – surjectivă 1p

f injectivă și surjectivă $\Rightarrow f$ – bijectivă 1p

dacă f bijectivă, atunci funcția este inversabilă 1p

b) dacă $x \in (0, \infty) \Rightarrow x > 0 \Rightarrow x + 1 > 1$

funcția exponențială cu baza supraunitară este monoton strict crescătoare 2p

atunci $2^{x+1} > 2^1 \Rightarrow 2^{x+1} - 1 > 1 \Rightarrow g$ funcție pozitivă 2p

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \log_{\frac{1}{2}}(2^{x+1} - 1 + 1) + 1 = -\log_2 2^{x+1} + 1 = -x - 1 + 1 = -x$ 3p

$-x = x^2 - 2 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 1$ și $x_2 = -2$ 2p

dar $x > 0 \Rightarrow x = 1$ este soluția care convine 1p



Subiectul 4. (30 puncte) Într-o unitate tehnologică se monitorizează parametrii apei utilizate într-un proces industrial automatizat. Se calculează pH-ul unei probe de apă industrială după formula $\text{pH} = -\lg[\text{H}^+]$, unde $[\text{H}^+]$, este concentrația ionilor de hidrogen (exprimată în mol/L), obținându-se valoarea 5. Pentru aceeași probă se studiază și evoluția numărului de bacterii patogene în funcție de timp $N(t)$ (t exprimat în ore) și numărul acestora la momentul recoltării probei (N_0), utilizându-se relația $N(t) = N_0 \cdot 10^{0,3t}$.

- Stabiliți de câte ori trebuie redusă concentrația ionilor de hidrogen pentru ca apa să devină neutră (apa neutră are $\text{pH} = 7$).
- După cât timp numărul bacteriilor din proba de apă se va dubla? Aproximați rezultatul la cel mai apropiat număr natural.
- În timpul funcționării unui utilaj din această unitate, intensitatea sunetului I (exprimată în W/m^2) crește. Stabiliți cât poate fi valoarea maximă a acestei intensități, fără a afecta securitatea muncii, știind că pragul de risc este de la o valoare mai mare de 85 dB pentru nivelul intensității sonore, nivel care se calculează după formula

$$L = 10 \cdot \lg \frac{I}{I_0} \text{ (exprimată în dB), unde } I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2.$$

Soluție:

- $\text{pH} = -\lg[\text{H}^+] \Rightarrow 5 = -\lg[\text{H}^+] \Rightarrow \dots\dots\dots 2\text{p}$
 $\Rightarrow [\text{H}^+] = 10^{-5} \text{ mol/L} \dots\dots\dots 2\text{p}$
Apa neutră are $\text{pH} = 7 \Rightarrow 7 = -\lg[\text{H}^+]_n \Rightarrow [\text{H}^+]_n = \frac{10^{-7} \text{ mol}}{L} \dots\dots\dots 2\text{p}$
 $\frac{10^{-5}}{10^{-7}} = 10^2 = 100$, deci concentrația trebuie redusă de 100 de ori. $\dots\dots\dots 2\text{p}$
- $N(t) = N_0 \cdot 10^{0,3t} \Rightarrow 2N_0 = N_0 \cdot 10^{0,3t} \Rightarrow \dots\dots\dots 2\text{p}$
 $\Rightarrow 2 = 10^{0,3t} \Rightarrow \dots\dots\dots 1\text{p}$
 $\Rightarrow 0,3t = \lg 2 \Rightarrow \dots\dots\dots 2\text{p}$
 $\Rightarrow t = \frac{\lg 2}{0,3} \Rightarrow \dots\dots\dots 1\text{p}$
 $\Rightarrow t = \frac{10 \lg 2}{3} \Rightarrow \dots\dots\dots 2\text{p}$
 $\Rightarrow t = \frac{\lg 2^{10}}{3} = \frac{\lg 1024}{3} \Rightarrow \dots\dots\dots 2\text{p}$
 $\Rightarrow t \approx \frac{\lg 1000}{3} = \frac{3}{3} \Rightarrow t=1 \text{ oră} \dots\dots\dots 2\text{p}$
- $L = 10 \cdot \lg \frac{I}{I_0} \Rightarrow 10 \cdot \lg \frac{I}{10^{-12}} \leq 85 \Rightarrow \dots\dots\dots 2\text{p}$
 $\Rightarrow \lg \frac{I}{10^{-12}} \leq 8,5 \Rightarrow \dots\dots\dots 2\text{p}$
 $\Rightarrow \frac{I}{10^{-12}} \leq 10^{8,5} \Rightarrow \dots\dots\dots 2\text{p}$
 $\Rightarrow I \leq 10^{-3,5} \Rightarrow \dots\dots\dots 2\text{p}$
 $\Rightarrow I_{\max} = 10^{-3,5} \text{ W/m}^2 \dots\dots\dots 2\text{p}$

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii; se acordă 10 puncte din oficiu.

Orice rezolvare corectă a oricărei probleme, dar diferită de cea din barem se notează cu punctaj echivalent.

Punctajul maxim este de 100 de puncte.

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
„ADOLF HAIMOVICI”
Ediția a XXVIII-aETAPA JUDEȚEANĂ – 7 martie 2026
Clasa a XI-a – Secțiunea H1 – Filieră tehnologică

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Subiectul 1. (20 puncte)

Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} x^3 & 3x^2 & 3x \\ x^2 & x^2 + 2x & 2x + 1 \\ x & 2x + 1 & x + 2 \end{pmatrix}$, unde x este un număr real.

Determinantul matricei $A(x)$ se notează cu $D(x)$.

- Arătați că $D(-1) = 8$.
- Determinați matricea $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ care verifică relația $A(-1) \cdot B = A(1)$.
- Demonstrați că $D(x) = x^3 \cdot (x - 1)^3$, pentru orice număr real x .

SOLUȚIE:

$$\begin{aligned}
 D(-1) &= \begin{vmatrix} -1 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \dots\dots\dots 3p \\
 &= 1 + 3 + 3 + 3 + 1 - 3 = 8. \dots\dots\dots 3p \\
 \text{a) } \det A(-1) &= D(-1) = 8 \neq 0 \Leftrightarrow A(-1) \text{ este inversabilă în } \mathcal{M}_3(\mathbb{R}). \dots\dots\dots 1p \\
 [A(-1)]^t &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}, [A(-1)]^{-1} = \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & -6 \\ 0 & -4 & -4 \\ -2 & -4 & -2 \end{pmatrix} \dots\dots\dots 3p \\
 B &= [A(-1)]^{-1} \cdot A(1) = \dots\dots\dots 1p \\
 &= \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & -6 \\ 0 & -4 & -4 \\ -2 & -4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} -8 & -24 & -24 \\ -8 & -24 & -24 \\ -8 & -24 & -24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -3 \\ -1 & -3 & -3 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \dots\dots\dots 2p \\
 \text{b) } D(x) &= \begin{vmatrix} x^3 & 3x^2 & 3x \\ x^2 & x^2 + 2x & 2x + 1 \\ x & 2x + 1 & x + 2 \end{vmatrix} \stackrel{L_1 \rightarrow L_1 - L_2}{\cong} \begin{vmatrix} x^2(x-1) & 2x(x-1) & x-1 \\ x^2 & x^2 + 2x & 2x + 1 \\ x & 2x + 1 & x + 2 \end{vmatrix} = \dots\dots\dots 1p \\
 &\stackrel{L_2 \rightarrow L_2 - L_3}{\cong} \begin{vmatrix} x^2(x-1) & 2x(x-1) & x-1 \\ x(x-1) & (x-1)(x+1) & x-1 \\ x & 2x + 1 & x + 2 \end{vmatrix} = \dots\dots\dots 1p \\
 &= (x-1)^2 \begin{vmatrix} x^2 & 2x & 1 \\ x & x+1 & 1 \\ x & 2x+1 & x+2 \end{vmatrix} = x(x-1)^2 \begin{vmatrix} x & 2x & 1 \\ 1 & x+1 & 1 \\ 1 & 2x+1 & x+2 \end{vmatrix} = \dots\dots\dots 2p \\
 &\stackrel{C_2 \rightarrow C_2 - C_1}{\cong} x(x-1)^2 \begin{vmatrix} x & x & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 2x & x+2 \end{vmatrix} = x^2(x-1)^2 \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & x+2 \end{vmatrix} = \dots\dots\dots 2p \\
 &\stackrel{C_3 \rightarrow C_3 - C_2}{\cong} x^2(x-1)^2 \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & x \end{vmatrix} = x^3(x-1)^2 \begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = x^3 \cdot (x-1)^3, (\forall)x \in \mathbb{R}. \dots\dots\dots 1p
 \end{aligned}$$

Subiectul 2. (20 puncte)

- a) Determinați valorile parametrului real m pentru care matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & x & 3 \\ m & x-1 & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix}$ este inversabilă pentru orice număr real x .
- b) Fie matricea $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Calculați B^n , unde n este un număr natural nenul.

SOLUȚIE:

- a) A este inversabilă în $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $(\forall)x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \det(A) \neq 0, (\forall)x \in \mathbb{R}$1p

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & x & 3 \\ m & x-1 & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 2(x-1)x + 3m + x - 3(x-1) - 2 - mx^2 = \dots\dots\dots 2p$$

$$= (2-m)x^2 - 4x + (3m+1) \dots\dots\dots 1p$$

Cazul 1. $m \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$$\det(A) \neq 0, (\forall)x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (2-m)x^2 - 4x + (3m+1) \neq 0, (\forall)x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta < 0 \dots\dots\dots 1p$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4(2-m)(3m+1) = 16 - 4(-3m^2 + 5m + 2) = 4(3m^2 - 5m + 2) \dots\dots\dots 1p$$

$$\Delta < 0 \Leftrightarrow 4(3m^2 - 5m + 2) < 0 \Leftrightarrow m \in \left(\frac{2}{3}; 1\right). \dots\dots\dots 2p$$

Cazul 2. $m = 2$

$$\det(A) = -4x + 7.$$

$$\det(A) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{7}{4}. \text{ Pentru } m = 2 \text{ și } x = \frac{7}{4} \text{ matricea } A \text{ nu este inversabilă.} \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Finalizare: } m \in \left(\frac{2}{3}; 1\right). \dots\dots\dots 1p$$

b) $B^2 = \begin{pmatrix} 2^1 & 0 & 2^1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^1 & 0 & 2^1 \end{pmatrix}, B^3 = \begin{pmatrix} 2^2 & 0 & 2^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^2 & 0 & 2^2 \end{pmatrix}. \dots\dots\dots 2p$

Fie enunțul $P(n): B^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}, n \in \mathbb{N}^*$2p

$$n = 1 \Rightarrow P(1): B^1 = \begin{pmatrix} 2^0 & 0 & 2^0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^0 & 0 & 2^0 \end{pmatrix} \Rightarrow P(1) \text{ este propoziție adevărată.} \dots\dots\dots 1p$$

Presupunem adevărată $P(k): B^k = \begin{pmatrix} 2^{k-1} & 0 & 2^{k-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{k-1} & 0 & 2^{k-1} \end{pmatrix}, k \in \mathbb{N}^*$1p

Demonstrăm că este adevărată $P(k+1): B^{k+1} = \begin{pmatrix} 2^k & 0 & 2^k \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^k & 0 & 2^k \end{pmatrix}. \dots\dots\dots 1p$

$$B^{k+1} = B^k \cdot B = \begin{pmatrix} 2^{k-1} & 0 & 2^{k-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{k-1} & 0 & 2^{k-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2^{k-1} & 0 & 2 \cdot 2^{k-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 \cdot 2^{k-1} & 0 & 2 \cdot 2^{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^k & 0 & 2^k \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^k & 0 & 2^k \end{pmatrix} \dots\dots\dots 2p$$

Conform metodei inducției matematice rezultă că $P(n)$ este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$1p

**Subiectul 3. (20 puncte)**

Se consideră funcția $f: D \rightarrow \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2+5x+4}{x^2+ax+a}, a \in \mathbb{R}$.

- Dacă $a = 0$, să se specifice domeniul maxim de definiție al funcției f și să se calculeze $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1}$.
- Dacă $a = 0$, să se arate că tangenta la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = -1$, situat pe graficul funcției f , este perpendiculară pe dreapta $x + 3y - 6 = 0$.
- Determinați valorile parametrului $a \in \mathbb{R}$ astfel încât graficul funcției f să admită o singură asimptotă verticală.

SOLUȚIE:

- Dacă $a = 0$, vom avea $f(x) = \frac{x^2+5x+4}{x^2}$ 1p

$x^2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 0 \Rightarrow D = \mathbb{R}^*$ 1p

$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = f'(-1)$ 1p

Calcularea derivatei $f'(x) = \frac{(x^2+5x+4)'x^2 - (x^2+5x+4)(x^2)'}{x^4}$ 1p

$f'(x) = \frac{-5x-8}{x^3}, f'(-1) = 3$ 2p

Sau: $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\frac{x^2+5x+4}{x^2} - 0}{x+1} \stackrel{1p}{=} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+5x+4}{x^2(x+1)} \stackrel{1p}{=} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x+4)}{x^2(x+1)} \stackrel{1p}{=} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+4)}{x^2} = 3$ 4p
- $d: x + 3y - 6 = 0 \Rightarrow m_d = -\frac{1}{3}$ 2p

$m_{tg} = f'(-1) = 3$ 2p

Verificarea condiției de perpendicularitate: $tg \perp d \Leftrightarrow m_d \cdot m_{tg} = -1$ 2p

Observație:

Scrierea doar a ecuației tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = -1$:

$y - f(-1) = f'(-1)(x + 1) \Rightarrow y = 3x + 3$ 1p

c) Considerăm funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x^2 + ax + a$.

Dacă $\Delta = a^2 - 4a < 0 \Rightarrow g(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ nu are asimptote verticale.1p

Dacă $\Delta = a^2 - 4a = 0 \Leftrightarrow a \in \{0, 4\}$

$a = 0 \Rightarrow g(x) = x^2 \Rightarrow f(x) = \frac{x^2+5x+4}{x^2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2+5x+4}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2+5x+4}{x^2} = \frac{4}{0_+} = \infty \Rightarrow x = 0$ este singura asimptotă verticală la graficul funcției f 2p

$a = 4 \Rightarrow g(x) = x^2 + 4x + 4 \Rightarrow f(x) = \frac{x^2+5x+4}{(x+2)^2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2+5x+4}{(x+2)^2} = \frac{-2}{0_+} = -\infty \Rightarrow x = -2$ este singura asimptotă verticală la graficul funcției f2p

Dacă $\Delta = a^2 - 4a > 0 \Leftrightarrow a \in (-\infty, 0) \cup (4, \infty)$

Considerăm funcția $h(x) = x^2 + 5x + 4 \Leftrightarrow h(x) = (x + 1)(x + 4) \Rightarrow h(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1, -4\}$

Dacă $x = -1$ este o rădăcină comună a lui h și $g \Rightarrow h(-1) = g(-1) = 0 \Rightarrow (-1)^2 + a \cdot (-1) + a = 0 \Leftrightarrow 1 = 0$ (fals).

Dacă $x = -4$ este o rădăcină comună a lui h și $g \Rightarrow h(-4) = g(-4) = 0 \Rightarrow (-4)^2 + a \cdot (-4) + a = 0$

$\Leftrightarrow 16 - 4a + a = 0 \Leftrightarrow a = \frac{16}{3} \in (4, \infty) \Rightarrow g(x) = x^2 + \frac{16}{3}x + \frac{16}{3} \Leftrightarrow g(x) = (x + 4)\left(x + \frac{4}{3}\right)$ și

$f(x) = \frac{(x+4)(x+1)}{(x+4)(x+\frac{4}{3})} \Rightarrow f(x) = \frac{(x+1)}{(x+\frac{4}{3})} \Rightarrow x = -\frac{4}{3}$ este singura asimptotă verticală la graficul funcției f 2p

$S = \{0, 4, \frac{16}{3}\}$ 1p

**Subiectul 4. (30 puncte)**

Toboganul Marele Alb din parcul balnear de la Băile Figa este cel mai înalt din România.

$H(x)$ reprezintă înălțimea la care se află vizitatorul după ce a parcurs distanța x (exprimată în metri) de la punctul

de start al toboganului și este definită prin: $H(x) = \begin{cases} ax^2 - \frac{1}{4}x + b, & x \in [0, 2] \\ \frac{32}{\pi} \arctg \frac{1}{x-2}, & x \in (2, 40] \end{cases}$, unde $a, b \in \mathbb{R}$.

Toboganul nu prezintă „sărituri”, adică funcția H este continuă pe întreg domeniul de definiție $[0, 40]$.

- Determinați numărul real pozitiv b , știind că la momentul startului, vizitatorul se află la înălțimea de 18 m față de nivelul solului.
- Folosind valoarea lui b obținută anterior, determinați valoarea parametrului real a .

SOLUȚIE:

$$a) \quad H(0) = a \cdot 0^2 - \frac{1}{4} \cdot 0 + b \dots\dots\dots 3p$$

$$H(0) = 18 \dots\dots\dots 3p$$

$$\Rightarrow b = 18 \dots\dots\dots 4p$$

$$b) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} H(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} (ax^2 - \frac{1}{4}x + 18) = 4a - \frac{1}{4} \cdot 2 + 18 = 4a + \frac{35}{2} \dots\dots\dots 5p$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} H(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \left(\frac{32}{\pi} \arctg \frac{1}{x-2} \right) = \frac{32}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = 16 \dots\dots\dots 5p$$

$$H \text{ continuă pe } [0, 40] \Rightarrow H \text{ continuă în } 2 \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} H(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} H(x) = H(2) \dots\dots\dots 5p$$

$$4a + \frac{35}{2} = 16 \Rightarrow a = -\frac{3}{8} \dots\dots\dots 5p$$

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii; se acordă 10 puncte din oficiu.

Orice rezolvare corectă a oricărei probleme, dar diferită de cea din barem, se notează cu punctaj echivalent.

Punctajul maxim este de 100 de puncte.



CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ

„ADOLF HAIMOVICI”

Ediția a XXVIII-a

ETAPA JUDEȚEANĂ – 7 martie 2026

Clasa a XII-a – Secțiunea H1 – Filieră tehnologică

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Subiectul 1. (20 puncte)

Pe mulțimea $\mathbb{Z}$ se definește legea de compoziție $x * y = xy - 2x - 2y + 6$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{Z}$.

- Demonstrați că legea „ $*$ ” este asociativă și comutativă;
- Determinați elementele simetrizabile ale mulțimii $\mathbb{Z}$ în raport cu legea „ $*$ ”;
- Demonstrați că, dacă m, n și p sunt numere naturale astfel încât $m * n * p = 13$ și $m \leq n \leq p$, atunci produsul numerelor m, n și p este divizibil cu 13.

SOLUȚIE:

$$\begin{aligned} \text{a) } \text{Avem } (x * y) * z &= (xy - 2x - 2y + 6) * z = (xy - 2x - 2y + 6)z - 2(xy - 2x - 2y + 6) - 2z + 6 = \\ &= xyz - 2xy - 2xz - 2yz + 4x + 4y + 4z - 6 \dots\dots\dots 2p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{și } x * (y * z) &= x * (yz - 2y - 2z + 6) = x(yz - 2y - 2z + 6) - 2x - 2(yz - 2y - 2z + 6) + 6 = \\ &= xyz - 2xy - 2xz - 2yz + 4x + 4y + 4z - 6 \dots\dots\dots 2p \end{aligned}$$

Adunarea și înmulțirea în $\mathbb{Z}$ sunt comutative, astfel avem $(x * y) * z = x * (y * z), \forall x, y, z \in \mathbb{Z}$, adică legea „ $*$ ” este asociativă1p

Adunarea și înmulțirea în $\mathbb{Z}$ sunt comutative, astfel avem: $x * y = xy - 2x - 2y + 6$ și $y * x = yx - 2y - 2x + 6$, deci $x * y = y * x, \forall x, y \in \mathbb{Z}$ 1p

Adică legea este și comutativă1p

- b) Legea „ $*$ ” admite element neutru dacă există $e \in \mathbb{Z}$, astfel încât $x * e = e * x = x, \forall x \in \mathbb{Z}$

$$\text{Avem } x * e = e * x = x \Leftrightarrow xe - 2x - 2e + 6 = x \Leftrightarrow (x - 2)(e - 3) = 0, \forall x \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow e = 3 \in \mathbb{Z} \text{ este elementul neutru al legii } "*" \dots\dots\dots 2p$$

Fie $x \in \mathbb{Z}$, acesta este simetrizabil dacă există $x' \in \mathbb{Z}$, astfel încât $x * x' = x' * x = e = 3$

$$\text{Avem } x * x' = x' * x = 3 \Leftrightarrow xx' - 2x - 2x' + 6 = 3 \Leftrightarrow (x - 2)(x' - 2) = 1 \Rightarrow x - 2 \mid 1 \text{ și } x' - 2 \mid 1 \dots\dots 1p$$

$$\text{adică } x - 2 = 1, x' - 2 = 1 \Rightarrow x = x' = 3 \text{ sau } x - 2 = -1, x' - 2 = -1 \Rightarrow x = x' = 1 \dots\dots\dots 2p$$

Elementele simetrizabile sunt: $\{1, 3\}$ 1p

- c) $x * y = xy - 2x - 2y + 6 = (x - 2)(y - 2) + 2, \forall x, y \in \mathbb{Z}$ 1p

Legea „ $*$ ” fiind asociativă, prin calcul deducem $m * n * p = (m - 2)(n - 2)(p - 2) + 2$ 2p

$$m * n * p = 13 \Leftrightarrow (m - 2)(n - 2)(p - 2) + 2 = 13 \Leftrightarrow (m - 2)(n - 2)(p - 2) = 11 \dots\dots\dots 1p$$

Deoarece 11 este număr prim, $m, n, p \in \mathbb{N}$, iar $m - 2 \leq n - 2 \leq p - 2 \Rightarrow$

$$m - 2 = -11, n - 2 = -1, p - 2 = 1, \text{ obținem } m = -9, n = 1, p = 3 \text{ (nu convine), sau}$$

$$m, n, p \in \mathbb{N} \Rightarrow m - 2 = n - 2 = -1, p - 2 = 11 \Rightarrow m = n = 1, p = 13, \text{ sau}$$

$$m - 2 = n - 2 = 1, p - 2 = 11 \Rightarrow m = n = 3, p = 13 \dots\dots\dots 2p$$

$$\text{Întrucât } p = 13, \text{ vom avea } mnp = M_{13} \dots\dots\dots 1p$$

**Subiectul 2. (20 puncte)**

Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \log_3 x$.

a) Pentru funcția $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \frac{3^{f(x)}}{x} - x$, determinați primitiva $G: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, care verifică condiția $G(2) = 2026$;

b) Arătați că $I = \int_1^e x f(x) dx = \frac{e^2+1}{4 \ln 3}$;

c) Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$, definim $I_n = \int_1^e x f^n(x) dx$.

Demonstrați că $I_n = \frac{e^2}{2(\ln 3)^n} - \frac{n}{2 \ln 3} I_{n-1}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

SOLUȚIE:

$$a) 3^{f(x)} = 3^{\log_3 x} = x \dots\dots\dots 1p$$

$$g(x) = \frac{x}{x} - x = 1 - x \dots\dots\dots 1p$$

$$G(x) = \int (1 - x) dx = x - \frac{x^2}{2} + C \dots\dots\dots 2p$$

$$G(2) = 2 - 2 + C = C = 2026 \Rightarrow G(x) = x - \frac{x^2}{2} + 2026 \dots\dots\dots 2p$$

$$b) I = \int_1^e x \log_3 x dx = \frac{1}{\ln 3} \int_1^e x \ln x dx \dots\dots\dots 1p$$

$$\int_1^e x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^e - \frac{1}{2} \int_1^e x dx = \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^e - \frac{x^2}{4} \Big|_1^e \dots\dots\dots 3p$$

$$I = \frac{1}{\ln 3} \left(\frac{e^2}{2} - \frac{e^2-1}{4} \right) = \frac{e^2+1}{4 \ln 3} \dots\dots\dots 2p$$

$$c) I_n = \int_1^e x (\log_3 x)^n dx = \frac{1}{(\ln 3)^n} \int_1^e x (\ln x)^n dx \dots\dots\dots 1p$$

$$\int_1^e x (\ln x)^n dx = \frac{x^2}{2} (\ln x)^n \Big|_1^e - \frac{n}{2} \int_1^e x (\ln x)^{n-1} dx \dots\dots\dots 4p$$

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{n}{2} \int_1^e x (\ln x)^{n-1} dx \dots\dots\dots 2p$$

$$I_n = \frac{e^2}{2(\ln 3)^n} - \frac{n}{2 \ln 3} I_{n-1}, \forall n \in \mathbb{N} \dots\dots\dots 1p$$

Subiectul 3. (20 puncte)

Se consideră matricele $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, unde $A = \begin{pmatrix} 2026 & 1 \\ 2025 & 1 \end{pmatrix}$, iar $B = \begin{pmatrix} -2026 & 2025 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Fie, de asemenea, mulțimea $G = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) | \det(X) = 1\}$.

- Verificați dacă A și B aparțin mulțimii G .
- Demonstrați că mulțimea G , împreună cu operația de înmulțire a matricelor, formează un grup.
- Demonstrați că, dacă $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$ este soluție a ecuației $X^2 - X + I_2 = O_2$, atunci $a + d = 1$.

SOLUȚIE:

a) $\det(A) = \begin{vmatrix} 2026 & 1 \\ 2025 & 1 \end{vmatrix} = 2026 \cdot 1 - 1 \cdot 2025 = 2026 - 2025 = 1 \Rightarrow A \in G$ 2p

$\det(B) = \begin{vmatrix} -2026 & 2025 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2026 \cdot 1 - 2025 \cdot (-1) = -2026 + 2025 = -1 \Rightarrow B \notin G$ 2p

b) $(\forall) X, Y \in G \Rightarrow \det(X) = \det(Y) = 1$ 1p

Folosind că: $\det(X \cdot Y) = \det(X) \cdot \det(Y)$ pentru $(\forall) X, Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ deducem $\det(X \cdot Y) = 1$ 1p

Deci $X \cdot Y \in G$, $(\forall) X, Y \in G$ (1)1p

Avem că $(X \cdot Y) \cdot Z = X \cdot (Y \cdot Z)$, $(\forall) X, Y$ și $Z \in G$ (2)1p

De asemenea, $\det(I_2) = 1$, deci $(\exists) I_2 \in G$ a.î. $I_2 \cdot X = X \cdot I_2 = X$, $(\forall) X \in G$ (3)2p

Pentru $(\forall) X \in G$, din $\det(X) = 1 \Rightarrow (\exists) X^{-1} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, pentru care $X^{-1} \cdot X = X \cdot X^{-1} = I_2$,

de unde deducem că $\det(X^{-1}) = \frac{1}{\det(X)} = 1$, deci $(\forall) X \in G$, $(\exists) X^{-1} \in G$ a.î. $X^{-1} \cdot X = X \cdot X^{-1} = I_2$ (4)2p

Din relațiile (1), (2), (3) și (4) deducem că mulțimea G împreună cu operația de înmulțire a matricelor formează un grup.2p

c) Utilizând relația lui Cayley-Hamilton: $X^2 - (a + d)X + \det X \cdot I_2 = O_2$ 2p

obținem pentru $X \in G$ că $X^2 - (a + d)X + I_2 = O_2$ 1p

Din ipoteză avem că $X^2 - X + I_2 = O_2$ deci $(a + d)X = X \Leftrightarrow (a + d - 1)X = O_2$ 1p

Deoarece $\det(X) = 1$ și deci $X \neq O_2$, deducem că $a + d - 1 = 0 \Leftrightarrow a + d = 1$ 2p

**Subiectul 4. (30 puncte)**

Cu ocazia unui experiment, s-a observat că intensitatea radiației produsă de o sursă, măsurată într-un punct situat la distanța $a > 0$ față de acea sursă, este dată de formula: $I(a) = \int_0^1 \frac{1}{x^2+a^2} dx$.

a) Calculați valoarea intensității radiației măsurată în punctele situate la distanțele $a = 1$ și $a = \sqrt{3}$ față de sursă;

b) Demonstrați că funcția $I: (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, cu $I(a) = \int_0^1 \frac{1}{x^2+a^2} dx$ este descrescătoare; interpretați din punct de vedere fizic rezultatul obținut;

c) Demonstrați că are loc relația: $I(a) > \frac{1}{a^2+1}$, pentru orice $a > 0$.

SOLUȚIE:

$$a) I(1) = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx = \arctg x \Big|_0^1 = \arctg 1 - \arctg 0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4} \dots\dots\dots 5p$$

$$I(\sqrt{3}) = \int_0^1 \frac{1}{x^2+3} dx = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctg \frac{x}{\sqrt{3}} \Big|_0^1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\arctg \frac{1}{\sqrt{3}} - \arctg 0 \right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6\sqrt{3}} = \frac{\pi\sqrt{3}}{18} \dots\dots\dots 5p$$

$$b) \text{ Pentru } (\forall) a, b \text{ cu } 0 < a < b \text{ și } (\forall) x \in (0; 1) \text{ avem că } x^2 + a^2 < x^2 + b^2 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2+a^2} > \frac{1}{x^2+b^2} \dots\dots\dots 2p$$

de unde, conform proprietății de monotonie a integralei definite, găsim că

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2+a^2} dx > \int_0^1 \frac{1}{x^2+b^2} dx \Rightarrow I(a) > I(b), \text{ adică funcția } I \text{ este descrescătoare} \dots\dots\dots 5p$$

Din punctul de vedere fizic, această inegalitate explică faptul că, pe măsură ce ne îndepărtăm

de sursă, intensitatea radiației scade $\dots\dots\dots 3p$

$$c) (\forall) x \in (0; 1) \text{ și } (\forall) a \text{ cu } a > 0 \text{ avem } a^2 + x^2 < a^2 + 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2+a^2} > \frac{1}{a^2+1} \dots\dots\dots 5p$$

$$\text{de unde, integrând de la } 0 \text{ la } 1, \text{ găsim: } I(a) = \int_0^1 \frac{1}{x^2+a^2} dx > \int_0^1 \frac{1}{a^2+1} dx \Rightarrow I(a) > \frac{1}{a^2+1} \cdot x \Big|_0^1 = \frac{1}{a^2+1} \dots\dots\dots 5p$$

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii; se acordă 10 puncte din oficiu.

Orice rezolvare corectă a oricărei probleme, dar diferită de cea din barem se notează cu punctaj echivalent.

Punctajul maxim este de 100 de puncte.

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
„ADOLF HAIMOVICI”
Ediția a XXVIII-aETAPA JUDEȚEANĂ – 7 martie 2026
Clasa a IX-a – Secțiunea H2 – Profil real, specializarea științe ale naturii

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Subiectul 1. (20 puncte)

a) Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $n\sqrt{3} > m$. Arătați că: $3n^2 - m^2 \geq 2$.b) Arătați că: $\sqrt{k^2 + 2} - k > \frac{1}{k+1}$, pentru orice $k \in \mathbb{N}$.c) Dacă $m, n \in \mathbb{N}^*$ și $\sqrt{3} > \frac{m}{n}$, arătați că: $\sqrt{3} - \frac{m}{n} > \frac{1}{n(m+1)}$.

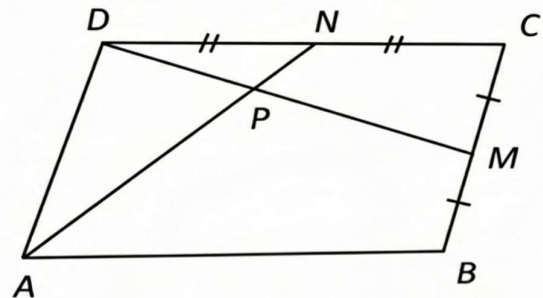
SOLUȚIE:

a) $m, n \in \mathbb{N}^*$, $n\sqrt{3} > m \Rightarrow 3n^2 > m^2$ și $m, n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow 3n^2 - m^2 > 0$ și $m, n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow 3n^2 - m^2 \in \mathbb{N}^* \dots\dots\dots 2p$ Dacă $3n^2 - m^2 = 1 \Rightarrow m^2 = 3n^2 - 1 = M_3 - 1 = M_3 + 2 \Rightarrow$ contradicție deoarece numerele care dau restul 2 la împărțirea la 3 nu pot fi pătrate perfecte, prin urmare $3n^2 - m^2 \neq 1 \dots\dots\dots 4p$ $3n^2 - m^2 \neq 1, 3n^2 - m^2 \in \mathbb{N}^* \Rightarrow 3n^2 - m^2 \geq 2 \dots\dots\dots 1p$ b) $\sqrt{k^2 + 2} - k > \frac{1}{k+1} \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{k^2 + 2} + k} > \frac{1}{k+1} \Leftrightarrow 2k+2 > \sqrt{k^2 + 2} + k \Leftrightarrow k+2 > \sqrt{k^2 + 2} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow k^2 + 4k + 4 > k^2 + 2 \Leftrightarrow 4k + 2 > 0$, adevărat $\forall k \in \mathbb{N}^* \dots\dots\dots 5p$ c) $\sqrt{3} > \frac{m}{n} \Rightarrow n\sqrt{3} > m \stackrel{a)}{\Rightarrow} 3n^2 - m^2 \geq 2 \Rightarrow 3n^2 \geq m^2 + 2 \Rightarrow \sqrt{3} \geq \frac{\sqrt{m^2 + 2}}{n} \Rightarrow \sqrt{3} - \frac{m}{n} \geq \frac{\sqrt{m^2 + 2} - m}{n} \stackrel{b)}{>} \frac{1}{n(m+1)}$ Prin urmare, $\sqrt{3} - \frac{m}{n} > \frac{1}{n(m+1)} \dots\dots\dots 8p$

Subiectul 2. (20 puncte)

Fie $ABCD$ un patrulater în care $AB \parallel CD$, punctele M și N sunt mijloacele laturilor BC , respectiv DC , iar P este intersecția dreptelor AN și DM . Știind că $AP = 4PN$, se cere:

- Arătați că $5 \cdot \overrightarrow{DP} = \overrightarrow{DA} + \frac{2DC}{AB} \cdot \overrightarrow{AB}$.
- Demonstrați că $ABCD$ este paralelogram.
- Determinați valoarea raportului $\frac{DP}{PM}$.



SOLUȚIE:

$$a) \frac{AP}{PN} = \frac{4}{1} \Rightarrow \overrightarrow{DP} = \frac{1}{5} \overrightarrow{DA} + \frac{4}{5} \overrightarrow{DN} \dots\dots\dots 3p$$

$$\overrightarrow{DC} \text{ și } \overrightarrow{AB} \text{ sunt coliniari, deci } \overrightarrow{DC} = \frac{DC}{AB} \cdot \overrightarrow{AB} \dots\dots\dots 2p$$

$$5\overrightarrow{DP} = \overrightarrow{DA} + 4\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{DA} + 4 \cdot \frac{1}{2} \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DA} + 2 \cdot \frac{DC}{AB} \overrightarrow{AB} \dots\dots\dots 2p$$

$$b) \overrightarrow{DP} = \frac{1}{5} \overrightarrow{DA} + \frac{2}{5} \cdot \frac{DC}{AB} \overrightarrow{AB} \dots\dots\dots 1p$$

$$\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DB}) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{DC}{AB} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} \right) = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{DA} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{DC}{AB} + 1 \right) \overrightarrow{AB} \dots\dots\dots 3p$$

$$\overrightarrow{DP} \text{ și } \overrightarrow{DM} \text{ sunt coliniari, deci } \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{2}{5} \cdot \frac{DC}{AB}}{\frac{1}{2} \left(\frac{DC}{AB} + 1 \right)} \Rightarrow \frac{DC}{AB} = 1 \dots\dots\dots 3p$$

$$AB \parallel CD, AB = CD \Rightarrow ABCD \text{ paralelogram} \dots\dots\dots 1p$$

$$c) \text{ Din b) } ABCD \text{ este paralelogram} \Rightarrow \overrightarrow{DP} = \frac{1}{5} \overrightarrow{DA} + \frac{2}{5} \overrightarrow{AB} \text{ și } \overrightarrow{DM} = \frac{1}{2} \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} \dots\dots\dots 3p$$

$$\overrightarrow{DP} = \frac{2}{5} \overrightarrow{DM} \Rightarrow \frac{DP}{DM} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{DP}{PM} = \frac{2}{3} \dots\dots\dots 2p$$

**Subiectul 3. (20 puncte)**

Să se arate că: $\frac{x}{x+2y+2z} + \frac{y}{2x+y+2z} + \frac{z}{2x+2y+z} \geq \frac{3}{5}, \forall x, y, z > 0.$

SOLUȚIE:

Notăm $x+2y+2z=a$, $2x+y+2z=b$, $2x+2y+z=c$, $\forall a, b, c > 0$. Prin adunarea celor trei relații, obținem

$$5x+5y+5z=a+b+c \Rightarrow x+y+z=\frac{a+b+c}{5} \dots\dots\dots 5p$$

$$x=\frac{2b+2c-3a}{5}, y=\frac{2a+2c-3b}{5}, z=\frac{2a+2b-3c}{5} \dots\dots\dots 6p$$

Primul membru al inegalității devine:

$$\frac{2b+2c-3a}{5a} + \frac{2a+2c-3b}{5b} + \frac{2a+2b-3c}{5c} = \frac{2}{5} \left[\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c} \right) \right] - 3 \cdot \frac{3}{5} \dots\dots\dots 4p$$

Folosind inegalitatea fundamentală $\frac{m}{n} + \frac{n}{m} \geq 2, \forall m, n > 0$, se obține:

$$\frac{2}{5} \left[\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c} \right) \right] - 3 \cdot \frac{3}{5} \geq \frac{2}{5} \cdot 6 - \frac{9}{5} = \frac{3}{5}, \text{ de unde concluzia} \dots\dots\dots 5p$$

(Cazul de egalitate are loc pentru $a=b=c \Leftrightarrow x=y=z$)

Metodă alternativă

$$\frac{x}{x+2y+2z} + \frac{y}{2x+y+2z} + \frac{z}{2x+2y+z} = \frac{x^2}{x^2+2xy+2xz} + \frac{y^2}{2xy+y^2+2yz} + \frac{z^2}{2xz+2yz+z^2} \geq$$

$$\geq \frac{(x+y+z)^2}{x^2+y^2+z^2+4xy+4xz+4yz} \dots\dots\dots 10p$$

Se arată prin calcul echivalența:

$$\frac{(x+y+z)^2}{x^2+y^2+z^2+4xy+4xz+4yz} \geq \frac{3}{5} \Leftrightarrow 2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2xz-2yz \geq 0 \Leftrightarrow (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \geq 0,$$

inegalitate adevărată, $\forall x, y, z > 0$, de unde concluzia.....10p

(Cazul de egalitate are loc pentru $x=y=z$)

Subiectul 4. (30 puncte)

Pe o hartă care are scara 1:10000000, localitățile sunt reprezentate prin puncte. Patru orașe, reprezentate pe hartă prin punctele A, B, C și D , sunt așezate astfel încât $ABCD$ este paralelogram, iar următoarele distanțe dintre orașe, măsurate în linie dreaptă pe hartă sunt: $AB = 4$ cm, $BD = 3$ cm, $BC = 2$ cm. Localitatea *Geometria* se află în punctul G , care este centrul de greutate al triunghiului determinat de punctele A, B și D , iar localitatea *Iași* se află în punctul I , care este centrul cercului înscris în triunghiul determinat de punctele B, C și D . Localitatea *Matematica*, reprezentată de punctul M , se află între localitățile B și C astfel încât punctele B, M și C să fie coliniare și $BM = 2MC$.

- Un biciclist curajos, pleacă din localitatea marcată cu punctul A spre localitatea reprezentată de punctul D cu viteza de 20 km/oră. După 7 ore, pleacă tot din localitatea reprezentată de punctul A , în aceeași direcție, un șofer cu viteza de 80 km/oră. Calculați distanța reală dintre orașele reprezentate de punctele A și D și determinați la ce distanță față de localitatea de destinație se întâlnesc cei doi, știind că biciclistul a făcut pauză de masă de o oră până la momentul întâlnirii.
- Arătați că punctele G, I și M sunt coliniare.

SOLUȚIE:

$$a) \text{ scară hartă} = \frac{\text{dist.hartă}}{\text{dist.reală}} \dots\dots\dots 1p$$

$$\frac{1}{10000000} = \frac{2}{AD_{real}} \Rightarrow AD_{real} = 20000000 \text{ cm} \Rightarrow AD_{real} = 200 \text{ km} \dots\dots\dots 3p$$

Notând cu t , timpul în ore necesar șoferului de la pornire și până la întâlnire, rezultă că timpul în ore necesar biciclistului de la pornire și până la întâlnire este $t + 7$ 2p

distanța parcursă de cei doi este aceeași, de unde rezultă $80t = 20(t + 6) \Rightarrow t = 2$, prin urmare distanța față de localitatea reprezentată de punctul A este 160 km, iar distanța față de localitatea de destinație de la punctul de întâlnire este 200 km-160 km=40 km..... 4p

$$b) G \text{ este centrul de greutate al triunghiului } \triangle ABD \Rightarrow \vec{r}_G = \frac{\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_D}{3} \dots\dots\dots 2p$$

I este centrul cercului înscris în triunghiul $\triangle BCD$ de laturi $BC = 2$, $BD = 3$ și $CD = AB = 4$.

$$\Rightarrow \vec{r}_I = \frac{b\vec{r}_B + c\vec{r}_C + d\vec{r}_D}{b + c + d} = \frac{4\vec{r}_B + 3\vec{r}_C + 2\vec{r}_D}{4 + 3 + 2} = \frac{4\vec{r}_B + 3\vec{r}_C + 2\vec{r}_D}{9} \dots\dots\dots 4p$$

$$M \in (BC) \text{ și } BM = 2MC \Rightarrow \frac{BM}{MC} = 2 \Rightarrow \vec{r}_M = \frac{\vec{r}_B + 2\vec{r}_C}{3} \dots\dots\dots 2p$$

$$ABCD \text{ paralelogram} \Rightarrow \vec{r}_A + \vec{r}_C = \vec{r}_B + \vec{r}_D \dots\dots\dots 2p$$

$$\vec{r}_G = \frac{1}{3}(\vec{r}_B + \vec{r}_D - \vec{r}_C + \vec{r}_B + \vec{r}_D) = \frac{1}{3}(2\vec{r}_B - \vec{r}_C + 2\vec{r}_D) \dots\dots\dots 2p$$

$$\vec{MG} = \vec{r}_G - \vec{r}_M = \frac{1}{3}(2\vec{r}_B - \vec{r}_C + 2\vec{r}_D) - \frac{1}{3}(\vec{r}_B + 2\vec{r}_C) = \frac{1}{3}(\vec{r}_B - 3\vec{r}_C + 2\vec{r}_D) \dots\dots\dots 3p$$

$$\vec{MI} = \vec{r}_I - \vec{r}_M = \frac{1}{9}(4\vec{r}_B + 3\vec{r}_C + 2\vec{r}_D) - \frac{1}{3}(\vec{r}_B + 2\vec{r}_C) = \frac{1}{9}(4\vec{r}_B + 3\vec{r}_C + 2\vec{r}_D - 3\vec{r}_B - 6\vec{r}_C) = \frac{1}{9}(\vec{r}_B - 3\vec{r}_C + 2\vec{r}_D) \dots\dots\dots 3p$$

$$\vec{MG} = 3\vec{MI} \Rightarrow \vec{MG} \text{ și } \vec{MI} \text{ sunt vectori coliniari} \Rightarrow \text{punctele } G, I \text{ și } M \text{ sunt coliniare} \dots\dots\dots 2p$$



Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii; se acordă 10 puncte din oficiu.

Orice rezolvare corectă a oricărei probleme, dar diferită de cea din barem se notează cu punctaj echivalent.

Punctajul maxim este de 100 de puncte.

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
„ADOLF HAIMOVICI”

Ediția a XXVIII-a

ETAPA JUDEȚEANĂ – 7 martie 2026

Clasa a X-a – Secțiunea H2 – Profil real, specializarea științe ale naturii

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Subiectul 1. (20 puncte)

Se consideră numerele $a, b, c \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$, iar $x, y, z \in \mathbb{R}$ sunt astfel încât

$$a^x = b \cdot c, b^y = a \cdot c \text{ și } c^z = a \cdot b.$$

a) Dacă $a = 2, b = 4$ și $c = 8$, determinați valorile numerelor x, y și z .b) Demonstrați că suma $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1}$ este un număr natural, oricare ar fi numerele a, b, c, x, y și z cu proprietățile din enunț.

SOLUȚIE:

a) Din $2^x = 32, 4^y = 16$ și $8^z = 8$ 3pobținem $x = 5, y = 2, z = 1$ 3pb) Avem: $x \cdot \lg a = \lg bc \Rightarrow$ 3p

$$\Rightarrow x = \frac{\lg b + \lg c}{\lg a} \Rightarrow$$
 3p

$$\Rightarrow \frac{1}{x+1} = \frac{\lg a}{\lg a + \lg b + \lg c} \text{ și, analog, } \frac{1}{y+1} = \frac{\lg b}{\lg a + \lg b + \lg c}, \frac{1}{z+1} = \frac{\lg c}{\lg a + \lg b + \lg c} \text{ 5p}$$

$$\text{Rezultă că } \frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} = \frac{\lg a + \lg b + \lg c}{\lg a + \lg b + \lg c} = 1 \in \mathbb{N} \text{ 3p}$$

Subiectul 2. (20 puncte)

Rezolvați, în mulțimea numerelor reale, următoarele ecuații:

a) $\sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{2x+2} + \sqrt[3]{3x+2} = 0;$

b) $\sqrt[3]{x+5} + \sqrt[3]{x+6} = \sqrt[3]{2x+11}.$

Gazeta Matematică 12/2025 (Supliment)

SOLUȚIE:

a) Funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \sqrt[3]{ax+2}, a > 0$ este strict crescătoare, deoarece se obține prin compunerea a două funcții strict crescătoare2pFuncția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{2x+2} + \sqrt[3]{3x+2}$ este strict crescătoare, pentru că se obține prin sumarea unor funcții strict crescătoare 3p



- Rezultă că ecuația $f(x) = 0$ are cel mult o soluție reală 2p
- Cum $f(-1) = 0$, înseamnă că $x = -1$ este unica soluție a ecuației 3p
- b) Ridicând la puterea a treia ambii membri ai ecuației, obținem că
 $(x+5) + (x+6) + 3\sqrt[3]{x+5} \cdot \sqrt[3]{x+6} (\sqrt[3]{x+5} + \sqrt[3]{x+6}) = 2x+11$ 2p
- Înlocuind paranteza cu $\sqrt[3]{2x+11}$, deducem că $\sqrt[3]{x+5} \cdot \sqrt[3]{x+6} \cdot \sqrt[3]{2x+11} = 0$ 3p
- Rezultă că $x \in \left\{-6, -\frac{11}{2}, -5\right\}$, 3p
- care verifică (alternativ, se poate invoca injectivitatea funcției putere de gradul al treilea) 2p

Subiectul 3. (20 puncte)

- a) Fie z_1 și z_2 două numere complexe astfel încât $|z_1| = |z_2| = 1 \neq z_1 \cdot z_2$.

Arătați că $w = \frac{z_1 - z_2}{1 - z_1 \cdot z_2}$ este număr real.

- b) Demonstrați că orice număr real a se poate scrie sub forma $a = \frac{z_1 - z_2}{1 - z_1 \cdot z_2}$, unde z_1 și z_2 sunt două numere complexe astfel încât $|z_1| = |z_2| = 1 \neq z_1 \cdot z_2$.

SOLUȚIE:

- a) Cum $|z_1| = |z_2| = 1$, rezultă că $\overline{z_1} = \frac{1}{z_1}$ și $\overline{z_2} = \frac{1}{z_2}$ 2p

Numărul complex w este real dacă și numai dacă $\overline{w} = w$ 2p

Avem: $\overline{w} = \frac{\overline{z_1 - z_2}}{1 - \overline{z_1 \cdot z_2}} = \frac{\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2}}{1 - \frac{1}{z_1 \cdot z_2}} = \frac{\frac{z_2 - z_1}{z_1 \cdot z_2}}{\frac{z_1 \cdot z_2 - 1}{z_1 \cdot z_2}} = \frac{z_2 - z_1}{z_1 \cdot z_2 - 1} = w$, deci w este un număr real 4p

- b) Fie a un număr real oarecare. Considerăm, de exemplu, $z_1 = i$, număr care are modulul 1, și căutăm $z_2 \in \mathbb{C}$ astfel încât $|z_2| = 1$, $i \cdot z_2 \neq 1$ și $\frac{i - z_2}{1 - i \cdot z_2} = a$ 4p

Obținem că $z_2 = \frac{a - i}{ai - 1}$ 2p

Avem: $|z_2| = \frac{|a - i|}{|ai - 1|} = \frac{\sqrt{a^2 + (-1)^2}}{\sqrt{(-1)^2 + a^2}} = 1$, 4p

iar $i \cdot z_2 = \frac{(a - i)i}{ai - 1} = \frac{ai + 1}{ai - 1} \neq 1, \forall a \in \mathbb{R}$ 2p

**Subiectul 4. (30 puncte)**

- a) Fie α un număr real pozitiv dat și x, y, z trei numere reale pozitive astfel încât $x + y + z = \alpha$. Care este cea mai mare valoare posibilă a produsului $x \cdot y \cdot z$ și când se atinge acest maxim?
- b) Dintre toate triunghiurile care au perimetrul de 48 cm, determinați-l pe cel cu aria maximă și precizați care este această arie maximă.

SOLUȚIE:

a) Din inegalitatea mediilor avem că $\sqrt[3]{x \cdot y \cdot z} \leq \frac{x + y + z}{3}$, cu egalitate dacă și numai dacă $x = y = z$ 5p

Cea mai mare valoare posibilă a produsului $x \cdot y \cdot z$ este $\frac{\alpha^3}{27}$, care se atinge când $x = y = z = \frac{\alpha}{3}$ 5p

b) Fie a, b, c lungimile laturilor unui triunghi având semiperimetrul $p = 24$ cm. Aria triunghiului, dată de formula lui Heron, este $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ 5p

Observăm că numerele $x = p - a$, $y = p - b$ și $z = p - c$ au suma $x + y + z = 3p - (a + b + c) = 3p - 2p = p$, deci $x + y + z = 24$ (cm), indiferent de lungimile laturilor unui triunghi având perimetrul de 48 cm 5p

Conform punctului a), produsul $(p-a)(p-b)(p-c)$ este maxim atunci când $p-a = p-b = p-c$, așadar în cazul în care triunghiul este echilateral 5p

Aria maximă a unui triunghi cu perimetrul de 48 cm este aria triunghiului echilateral cu latura $48:3 = 16$ cm, adică este egală cu $64\sqrt{3}$ cm² 5p

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii; se acordă 10 puncte din oficiu.

Orice rezolvare corectă a oricărei probleme, dar diferită de cea din barem se notează cu punctaj echivalent.

Punctajul maxim este de 100 de puncte.

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
„ADOLF HAIMOVICI”

Ediția a XXVIII-a

ETAPA JUDEȚEANĂ – 7 martie 2026

Clasa a XI-a – Secțiunea H2 – Profil real, specializarea științe ale naturii

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Subiectul 1. (20 puncte)

Se consideră matricele $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea că $AB - BA = A$.a) Arătați că $\text{tr}(A) = 0$.b) Demonstrați că $ABA = O_2$.

SOLUȚIE:

a) $\text{tr}(AB - BA) = \text{tr}(AB) - \text{tr}(BA) \dots\dots\dots 5p$ AB și BA au aceeași urmă $\Rightarrow \text{tr}(A) = 0 \dots\dots\dots 5p$ b) $ABA - BA^2 = A^2$ și $A^2B - ABA = A^2 \dots\dots\dots 4p$ Cayley-Hamilton: $A^2 - \text{tr}(A) \cdot A + \det(A) \cdot I_2 = O_2, \forall A \in M_2(\mathbb{R}) \Rightarrow A^2 = -\det(A) \cdot I_2 \dots\dots\dots 2p$ $BA^2 = A^2B = -\det(A) \cdot B \Rightarrow A \cdot B \cdot A = -\det(A) \cdot B - \det(A) \cdot I_2 = -\det(A) \cdot B + \det(A) \cdot I_2 \Rightarrow \det(A) = 0 \dots\dots\dots 2p$ $A^2 = O_2$, deci $ABA = O_2 \dots\dots\dots 2p$

Subiectul 2. (20 puncte)

Fie punctele $A(-1, 6), B(1, -3), C(9, 0)$ și $D(4, 10)$.a) Calculați aria patrulaterului $ABCD$.b) Determinați mulțimea punctelor P din planul patrulaterului $ABCD$, astfel încât ariile triunghiurilor PAB și PCD să fie egale.

SOLUȚIE:

a) $A_{\triangle ABC} + A_{\triangle ADC} = A_{ABCD} \dots\dots\dots 2p$
$$\begin{vmatrix} -1 & 6 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 9 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 78 \Rightarrow A_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot |78| = 39 \text{ u.a.} \dots\dots\dots 3p$$
$$\begin{vmatrix} -1 & 6 & 1 \\ 4 & 10 & 1 \\ 9 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -70 \Rightarrow A_{\triangle ADC} = \frac{1}{2} \cdot |-70| = 35 \text{ u.a.} \dots\dots\dots 3p$$
 $A_{ABCD} = 39 + 35 = 74 \text{ u.a.} \dots\dots\dots 2p$ b) Notăm cu $P(a, b)$ coordonatele punctelor care satisfac condiția ca cele două arii să fie egale. $A_{\triangle PAB} = \frac{1}{2} |9a + 2b - 3| \dots\dots\dots 3p$ $A_{\triangle PCD} = \frac{1}{2} |10a + 5b - 90| \dots\dots\dots 3p$ $9a + 2b - 3 = \pm(10a + 5b - 90) \dots\dots\dots 2p$



Mulțimea punctelor care satisfac condiția dată este formată din reuniunea dreptelor $x + 3y - 87 = 0$ și $19x + 7y - 93 = 0$ 2p

Subiectul 3. (20 puncte)

a) Să se demonstreze inegalitatea: $-\frac{1}{4} \leq x^2 - x < 0, \forall x \in (0,1)$.

b) Se consideră funcția $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, continuă cu $f(0)f(1) < 0$. Să se arate că există un număr $c \in (0,1)$ astfel încât $-\frac{1}{4} \leq f(c) + f(c^2) < 0$.

SOLUȚIE:

a) $-\frac{1}{4} \leq x^2 - x < 0 \Leftrightarrow 0 \leq 4x^2 - 4x + 1 < 1 \Leftrightarrow 0 \leq (2x - 1)^2 < 1$ 5p

$x \in (0,1) \Leftrightarrow 2x \in (0,2) \Leftrightarrow 2x - 1 \in (-1,1) \Rightarrow 0 \leq (2x - 1)^2 < 1$ 5p

b) Se consideră funcția $g: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = f(x) + f(x^2) + x - x^2$ 3p

g funcție continuă cu $g(0)g(1) < 0$ 3p

Există $c \in (0,1)$ cu $g(c) = 0 \Leftrightarrow f(c) + f(c^2) = c^2 - c$ 2p

Dar $c^2 - c \in \left[-\frac{1}{4}, 0\right), \forall c \in (0,1) \Rightarrow -\frac{1}{4} \leq f(c) + f(c^2) < 0$ 2p

Subiectul 4. (30 puncte)

Doi asteroizi Asterisc și Obelisc, situați în același plan, pornesc la momentul $x_0 = 0$, descriind

următoarele legi de mișcare: Asterisc are traiectoria descrisă de $f(x) = \frac{2ax + a + 2}{2x + 1}, x \in [0, +\infty)$, iar Obelisc are

traiectoria descrisă de $g(x) = \frac{4ax^2 + 5x + 3}{bx^2 + 4}, x \in [0, +\infty)$, unde $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

La un moment dat cei doi asteroizi se ciocnesc, dar își urmează traiectoria.

a) Determinați parametrii reali $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, știind că traiectoriile, după ciocnire, sunt asimptotice dreptei $y = 1$.

b) Pentru a și b determinați la punctul a), aflați după cât timp de la pornire, se ciocnesc cei doi asteroizi, unitatea de timp fiind ora.

SOLUȚIE:

a) Condiția este $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ și $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$ 5p

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2ax + a + 2}{2x + 1} = 1 \Rightarrow a = 1$ 5p

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 + 5x + 3}{bx^2 + 4} = 1 \Rightarrow b = 4$ 5p

b) Se rezolvă ecuația $\frac{2x + 3}{2x + 1} = \frac{4x^2 + 5x + 3}{4x^2 + 4} \Leftrightarrow$ 3p



$$(2x + 3) \cdot (4x^2 + 4) = (2x + 1) \cdot (4x^2 + 5x + 3) \Leftrightarrow 2x^2 + 3x - 9 = 0 \dots\dots\dots 4p$$

Se obțin soluțiile $x_1 = -3$ (nu convine) și $x_2 = \frac{3}{2} \dots\dots\dots 5p$

Cei doi asteroizi se ciocnesc după 1h și 30 de minute de la pornire..... 3p

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii; se acordă 10 puncte din oficiu.

Orice rezolvare corectă a oricărei probleme, dar diferită de cea din barem se notează cu punctaj echivalent.

Punctajul maxim este de 100 de puncte.

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
„ADOLF HAIMOVICI”

Ediția a XXVIII-a

ETAPA JUDEȚEANĂ – 7 martie 2026

Clasa a XII-a – Secțiunea H2 – Profil real, specializarea științe ale naturii

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Subiectul 1. (20 puncte)

Considerăm mulțimea $G = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid A^t \cdot A = I_2\}$ (A^t este transpusa matricei A).

- a) Arătați că $(G, \cdot)$ este grup.
- b) Există matricele $A, B \in G$, astfel încât $A + B \in G$?
- c) Fie $H = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}) \mid A^t \cdot A = I_2\}$. Determinați numărul elementelor mulțimii H și arătați că $(H, \cdot)$ este grup.

SOLUȚIE:

- a)
- $A, B \in G \Rightarrow A^t \cdot A = I_2, B^t \cdot B = I_2 \Rightarrow (AB)^t \cdot (AB) = B^t \cdot A^t \cdot A \cdot B = B^t \cdot B = I_2$, deci „ $\cdot$ ” este lege de compoziție pe G 2 puncte
 - Înmulțirea matricelor este asociativă 2 puncte
 - $I_2 \in G, I_2$ este element neutru 2 puncte
 - $\forall A \in G, A^{-1} = A^t \in G \ ((A^t)^t A^t = A \cdot A^t = A \cdot A^{-1} = I_2)$ 2 puncte
- b) Aleg $A = I_2$ și caut $B \in G$ cu $I_2 + B \in G$, deci $(I_2 + B)^t(I_2 + B) = I_2 \Rightarrow B + B^t = -I_2, B^t \cdot B = I_2$ 2 puncte
- Găsim $B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$ sau $B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$ 3 puncte
- c) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}); A \in H \Rightarrow a^2 + c^2 = 1, b^2 + d^2 = 1, ab + cd = 0, a = \pm 1, c = 0$ și $b = 0, d = \pm 1$ sau $a = 0, c = \pm 1$ și $b = \pm 1, d = 0$, 2 puncte
- Găsim soluțiile: $I_2, -I_2, A, -A, B, -B, C, -C, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, deci H are 8 elemente 2 puncte
- $(H, \cdot)$ este grup al lui $(G, \cdot)$ 3 puncte

Subiectul 2. (20 puncte)

Considerăm funcția $f: [0, 1] \rightarrow \left[\frac{e}{2}, e^2\right], f(x) = \frac{x^2+1}{(x+1)^2} \cdot e^{\frac{2}{x+1}}$.

- a) Dacă $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție derivabilă cu derivata continuă, arătați că:

$$\int_0^1 (1 + xg'(x)) \cdot e^{g(x)} dx = e^{g(1)}.$$

- b) Calculați $\int_0^1 f(x) dx$.

- c) Arătați că funcția f este inversabilă și calculați $\int_{\frac{e}{2}}^{e^2} f^{-1}(x) dx$.

SOLUȚIE:

- a) $\int_0^1 (1 + xg'(x)) \cdot e^{g(x)} dx = \int_0^1 (xe^{g(x)})' \cdot dx = xe^{g(x)} \Big|_0^1 = e^{g(1)}$ 6 puncte



- b) Aleg $g(x) = \frac{2}{x+1}$, atunci $1 + xg'(x) = \frac{x^2+1}{(x+1)^2}$ și $f(x) = (1 + xg'(x)) \cdot e^{g(x)}$, deci $\int_0^1 f(x)dx = e^{g(1)} = e$ **6 puncte**
- c) $f'(x) = \frac{-4}{(x+1)^4} \cdot e^{\frac{2}{x+1}}$, f strict monotonă $\Rightarrow f$ injectivă, f continuă, $Im f = \left[\frac{e}{2}, e^2\right] \Rightarrow f$ surjectivă $\Rightarrow f$ bijectivă $\Rightarrow f$ inversabilă **2 puncte**
- $I = \int_{\frac{e}{2}}^{e^2} f^{-1}(x)dx$, $f^{-1}(x) = t \Rightarrow x = f(t)$, $f^{-1}\left(\frac{e}{2}\right) = 1$, $f^{-1}(e^2) = 0 \Rightarrow$
- $I = \int_1^0 t f'(t)dt = t f(t)|_1^0 - \int_1^0 f(t)dt = -\frac{e}{2} + e = \frac{e}{2}$ **6 puncte**

Subiectul 3. (20 puncte)

Considerăm grupul $(G, *)$ unde $G = (2, \infty)$ și $x * y = xy - 2x - 2y + 6$, pentru orice $x, y \in G$.

- a) Dacă $a, b, c \in G$ și $a * b = c$, $b * c = a$, $c * a = b$, arătați că $a = b = c$.
- b) Determinați șirul $(a_n)_{n \geq 1} \subset G$, știind că $a_1 * a_2 * \dots * a_n = n + 3$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.
- c) Fie H un subgrup al grupului G care conține toate numerele naturale $k \geq 3$. Demonstrați că H conține toate numerele raționale $q > 2$.

SOLUȚIE:

- a) Avem $x * y = (x - 2)(y - 2) + 2$, $\forall x, y \in G$ **3 puncte**
- $(a - 2)(b - 2) = c - 2$; $(b - 2)(c - 2) = a - 2$; $(c - 2)(a - 2) = b - 2$ **3 puncte**
- $a, b, c > 2$ și $(a - 2)^2(b - 2)^2(c - 2)^2 = (a - 2)(b - 2)(c - 2) \Rightarrow (a - 2)(b - 2)(c - 2) = 1 \Rightarrow$
- $(a - 2)^2 = (b - 2)^2 = (c - 2)^2 = 1$, deoarece $a, b, c \in G \Rightarrow a = b = c = 3$ **3 puncte**
- b) $n = 1 \Rightarrow a_1 = 4$ **1 punct**
- $n \geq 2$, $a_1 * a_2 * \dots * a_n = n + 3 \Rightarrow (n + 2) * a_n = n + 3 \Rightarrow n(a_n - 2) = n + 1$, deci $a_n = \frac{n+1}{n} + 2$,
- $a_n = 3 + \frac{1}{n}$, $n \geq 2$. Cum $3 + \frac{1}{1} = 4 \Rightarrow a_n = 3 + \frac{1}{n}$, $n \geq 1$ **3 puncte**
- c) $(H, *)$ subgrup $\Rightarrow e = 3 \in H$ ($e = 3$, element neutru în G) și $\forall x \in H$, $x' = 2 + \frac{1}{x-2} \in H$ (x' este simetricul lui $x > 2$ din G) **4 puncte**
- Fie $q \in \mathbb{Q}$, $q > 2$ deci $q - 2 > 0$, $q - 2 \in \mathbb{Q} \Rightarrow q - 2 = \frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{N}^*$ **1 punct**
- Rezultă $a + 2, b + 2 \in \mathbb{N}$, $a + 2 \geq 3$, $b + 2 \geq 3 \Rightarrow a + 2, b + 2 \in H$ **1 punct**
- $(a + 2) * (b + 2)' \in H \Rightarrow (a + 2 - 2) \left(2 + \frac{1}{b + 2 - 2} - 2 \right) + 2 \in H \Rightarrow \frac{a}{b} + 2 \in H$,
- deci $q \in H \Rightarrow$ concluzia **1 punct**

Subiectul 4. (30 puncte)

Un leu aleargă după pradă plecând dintr-un punct O cu accelerația

$$a(t) = \left(\frac{4t^2+2}{e^{15}} + \frac{2t}{e^4} \right) e^{t^2} + 3t^2 - 12t + 9, \text{ măsurată în } m/s^2, \text{ timpul } t \geq 0, \text{ măsurat în secunde.}$$

La momentul $t = 0$ viteza sa este $v(0) = \left(1 + \frac{1}{e^4} \right) m/s$.

- a) Arătați că $v(t) = \left(\frac{2t}{e^{15}} + \frac{1}{e^4} \right) e^{t^2} + t^3 - 6t^2 + 9t + 1, t \geq 0$.
- b) Stabiliți dacă există momente de timp în care leul este în repaus.
- c) Demonstrați că distanța parcursă de leu de la momentul $t = 1$ la $t = 4$ este mai mare decât 11 m.

Notă: Dacă $S(t)$ este spațiul parcurs de leu în t secunde, iar S este o funcție de două ori derivabilă, cu derivata a doua continuă, atunci viteza leului este $v(t) = S'(t)$, iar accelerația este $a(t) = S''(t)$.

SOLUȚIE:

- a) $a(t) = v'(t)$ deci v este primitivă a funcției a **2 puncte**
- $v(t) = \int a(t) dt, t \geq 0$ **3 puncte**
- Astfel $v(t) = \left(\frac{2t}{e^{15}} + \frac{1}{e^4} \right) e^{t^2} + t^3 - 6t^2 + 9t + C$ **3 puncte**



- $v(0) = 1 + \frac{1}{e^4} \Rightarrow \frac{1}{e^4} + C = 1 + \frac{1}{e^4} \Rightarrow C = 1 \Rightarrow v(t) = \left(\frac{2t}{e^{15}} + \frac{1}{e^4}\right)e^{t^2} + t^3 - 6t^2 + 9t + 1$ 2 puncte
- b) Leul este în repaus dacă $v(t) = 0, t \geq 0$ 3 puncte
- $v(t) = \left(\frac{2t}{e^{15}} + \frac{1}{e^4}\right)e^{t^2} + t(t-3)^2 + 1 > 0, \forall t \geq 0$ 4 puncte
- Leul nu este în repaus în nici un moment 1 punct
- c) $v(t) = S'(t) \Rightarrow \int_0^t v(x)dx = \int_0^t S'(x)dx \Rightarrow S(t) = S(0) + \int_0^t v(x)dx$
- Cum $S(0) = 0 \Rightarrow S(t) = \int_0^t v(x)dx$ 2 puncte
- $S(t) = \frac{1}{e^{15}}(e^{t^2} - 1) + \frac{t^4}{4} - 2t^3 + \frac{9t^2}{2} + t + \frac{1}{e^4} \int_0^t e^{x^2} dx$ 3 puncte
- Distanța parcursă între $t = 1$ și $t = 4$ este $S(4) - S(1)$ 2 puncte
- $S(4) - S(1) = \frac{1}{e^{15}}(e^{16} - e) + \frac{33}{4} + \frac{1}{e^4} \int_1^4 e^{x^2} dx$ 2 puncte
- Cum pentru $x \in [1, 4], e^{x^2} \geq e^x \Rightarrow \int_1^4 e^{x^2} dx \geq \int_1^4 e^x dx \Rightarrow \int_1^4 e^{x^2} dx \geq e^4 - e$ 2 puncte
- $S(4) - S(1) \geq e + \frac{33}{4} + 1 - \frac{e}{e^4} - \frac{e}{e^{15}} = e + \frac{37}{4} - \frac{e}{e^4} - \frac{e}{e^{15}}$
- $\frac{e}{e^4} + \frac{e}{e^{15}} = \frac{1}{e^3} + \frac{1}{e^{14}} < \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^{14}} < \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} = \frac{1}{2^2} \Rightarrow e - \frac{1}{e^3} - \frac{1}{e^{14}} + \frac{37}{4} > e - \frac{1}{4} + \frac{37}{4} > 2 - \frac{1}{4} + \frac{37}{4} = \frac{44}{4} = 11$
- $\Rightarrow S(4) - S(1) > 11$ 1 punct

Observație: Orice altă soluție corect demonstrată va fi punctată corespunzător.

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii; se acordă 10 puncte din oficiu.

Orice rezolvare corectă a oricărei probleme, dar diferită de cea din barem se notează cu punctaj echivalent.

Punctajul maxim este de 100 de puncte.